

## 13.1

a) Yhtälö  $5^x = 5^3$  toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret, eli kun  $x = 3$ .

b) Yhtälön molemmat puolet voidaan kirjoittaa luvun 5 potenssina.

$$5^x = 25$$

Ilmaistaan luku 25 luvun 5 potenssina:

$$25 = 5^2.$$

$$5^x = 5^2$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$x = 2$$

c) Yhtälöllä  $5^x = -125$  ei ole ratkaisuja, koska potenssin  $5^x$  arvo on aina positiivinen luku.

### Vastaus

a)  $x = 3$

b)  $x = 2$

c) ei ratkaisuja

## 13.2

- a)  $7^{2x} = 7^{12}$  Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned} 2x &= 12 & |:2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

- b) Yhtälön molemmat puolet voidaan kirjoittaa luvun 7 potenssina.

$$49^x = 7^4 \quad \text{Ilmaistaan luku 49 luvun 7 potenssina: } 49 = 7^2.$$

$$(7^2)^x = 7^4 \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$7^{2x} = 7^4 \quad \text{Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 4 & |:2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

### Vastaus

- a)  $x = 6$   
b)  $x = 2$

## 13.3

a)  $4 \cdot 5^x = 500 \quad |:4$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

$$5^x = 125$$

Kirjoitetaan molemmat puolet luvun 5 potenssina.

$$5^x = 5^3$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$x = 3$$

b)  $2^{x^2} = 16^x$

Kirjoitetaan molemmat puolet luvun 2 potenssina.

$$2^{x^2} = (2^4)^x$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$2^{x^2} = 2^{4x}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$x^2 = 4x \quad |-4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

$$a = 1, b = -4 \text{ ja } c = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{4+4}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-4}{2} = 0$$

**Vastaus**

a)  $x = 3$

b)  $x = 0$  tai  $x = 4$

## 13.4

a)  $6^{3x-5} = 36^x$

Kirjoitetaan molemmat puolet luvun 6 potenssina.

$$6^{3x-5} = (6^2)^x$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$6^{3x-5} = 6^{2x}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 2x & | -2x + 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

b)  $16^{x^2} = 4^{x+6}$

Kirjoitetaan molemmat puolet luvun 4 potenssina.

$$(4^2)^{x^2} = 4^{x+6}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$4^{2x^2} = 4^{x+6}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$2x^2 = x + 6 \quad | -x - 6$$

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

$$a = 2, b = -1 \text{ ja } c = -6$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{1+7}{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2}$$

**Vastaus**

a)  $x = 5$

b)  $x = -\frac{3}{2}$  tai  $x = 2$

## 13.5

- a) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 500 000.

$$f(x) = 500\,000$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 10\,000 \cdot 6^x.$$

$$10\,000 \cdot 6^x = 500\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 2,183\dots$$

$$x \approx 2,2 \text{ (h)}$$

Bakteerien lukumäärä on 500 000, kun aikaa on kulunut 2,2 tuntia.

- b) Bakteerien lukumäärä alussa on 10 000. Pitää selvittää, kuinka monen tunnin kuluttua bakteerien lukumäärä on tuhatkertaistunut, eli milloin bakteerien lukumäärä on  $10\,000 \cdot 1000 = 10\,000\,000$ .

Ratkaistaan millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 10 000 000.

$$f(x) = 10\,000\,000$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 10\,000 \cdot 6^x.$$

$$10\,000 \cdot 6^x = 10\,000\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 3,855\dots$$

$$x \approx 3,9 \text{ (h)}$$

Bakteerien lukumäärä on tuhatkertaistunut, kun aikaa on kulunut 3,9 tuntia.

### Vastaus

- a) 2,2 tunnin kuluttua  
b) 3,9 tunnin kuluttua

## 13.6

a)  $7^x = 21$

$$x = 1,564\dots$$

$$x \approx 1,56$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

b)  $3 + 5^x = 12$

$$x = 1,365\dots$$

$$x \approx 1,37$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

c)  $(5^x)^x = 10^{x+2}$

$$x = -1,121\dots \quad \text{tai} \quad x = 2,551\dots$$

$$x \approx -1,12 \quad \quad \quad x \approx 2,55$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

### Vastaus

a)  $x \approx 1,56$

b)  $x \approx 1,37$

c)  $x \approx -1,12$  tai  $x \approx 2,55$

## 13.7

Yhtälön  $(5^x)^2 = 5^2 \cdot 5^x$  ratkaiseminen aloitetaan kirjoittamalla yhtälön molemmat puolet luvun 5 potensseina. Koska  $(5^x)^2 = 5^{2x}$  ja  $5^2 \cdot 5^x = 5^{2+x}$ , oikea välivaihe on vaihtoehto

$$5^{2x} = 5^{2+x}.$$

Seuraavassa vaiheessa todetaan, että yhtälö ratkeaa, kun eksponentit  $2x$  ja  $2+x$  ovat yhtä suuret. Oikea välivaihe on siis vaihtoehto

$$2x = 2 + x.$$

Ratkaistaan yhtälö  $2x = 2 + x$ .

$$\begin{aligned} 2x &= 2 + x & | -x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on vaihtoehto

$$x = 2.$$

### Vastaus

$$\begin{aligned} 5^{2x} &= 5^{2+x} \\ 2x &= 2 + x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

## 13.8

a)  $3^{x+1} = (3^2)^5$

$$3^{x+1} = 3^{2 \cdot 5}$$

$$3^{x+1} = 3^{10}$$

$$x + 1 = 10 \quad | -1$$

$$x = 9$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

b)  $9^{3x} = 27^8$

$$(3^2)^{3x} = (3^3)^8$$

$$3^{2 \cdot 3x} = 3^{3 \cdot 8}$$

$$3^{6x} = 3^{24}$$

$$6x = 24 \quad | :6$$

$$x = 4$$

$$9 = 3^2, \quad 27 = 3^3$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

c)  $3^{2x} = 27 \cdot 3^x$

$$3^{2x} = 3^3 \cdot 3^x$$

$$3^{2x} = 3^{3+x}$$

$$2x = 3 + x \quad | -x$$

$$x = 3$$

$$27 = 3^3$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

### Vastaus

a)  $x = 9$    b)  $x = 4$    c)  $x = 3$

## 13.9

$$\text{a)} \quad 9^x = \frac{3^{12}}{3^4}$$

$$(3^2)^x = 3^{12-4}$$

$$3^{2x} = 3^8$$

$$2x = 8 \quad | :2$$

$$x = 4$$

$$9 = 3^2, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$\text{b)} \quad \frac{4^5}{4^x} = 16$$

$$4^{5-x} = 4^2$$

$$5-x = 2 \quad | -5$$

$$-x = -3 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = 3$$

$$16 = 4^2, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

### Vastaus

$$\text{a)} \quad x = 4$$

$$\text{b)} \quad x = 3$$

## 13.10

- a) Yhtälön  $2^x = 8$  ratkaisuja ovat ne muuttujan  $x$  arvot, joilla funktion  $f(x) = 2^x$  arvo on 8. Appletin perusteella funktion  $f$  arvo on 8, kun  $x = 3$ .
- b) Yhtälön  $2^x = 5$  ratkaisuja ovat ne muuttujan  $x$  arvot, joilla funktion  $f(x) = 2^x$  arvo on 5. Appletin perusteella funktion  $f$  arvo on 5, kun  $x \approx 2,3$ .
- c) Yhtälön  $2^x = 0,5$  ratkaisuja ovat ne muuttujan  $x$  arvot, joilla funktion  $f(x) = 2^x$  arvo on 0,5. Appletin perusteella funktion  $f$  arvo on 0,5, kun  $x = -1$ .

### Vastaus

- a)  $x = 3$   
b)  $x \approx 2,3$   
c)  $x = -1$

## 13.11

a) Yhtälön molemmat puolet voidaan kirjoittaa luvun 4 potenssina.

$$4^x = 16$$

Ilmaistaan luku 16 luvun 4 potenssina:

$$16 = 4^2.$$

$$4^x = 4^2$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$x = 2$$

b) Yhtälön molemmat puolet voidaan kirjoittaa luvun 2 potenssina.

$$4^x = 8$$

$$4 = 2^2 \text{ ja } 8 = 2^3$$

$$(2^2)^x = 2^3$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$2^{2x} = 2^3$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$2x = 3 \quad |:2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

c) Yhtälöllä  $4^x = -2$  ei ole ratkaisuja, koska potenssin  $4^x$  arvo on aina positiivinen luku.

### Vastaus

a)  $x = 2$

b)  $x = \frac{3}{2}$

c) ei ratkaisuja

## 13.12

a)  $6^{4x} + 14 = 50 \quad | -14$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

$$6^{4x} = 36$$

Kirjoitetaan molemmat puolet luvun 6 potenssina.

$$6^{4x} = 6^2$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$4x = 2 \quad |:4$$

$$x = \frac{1}{2}$$

b)  $(5^x)^{2x} = 25^9$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$5^{2x^2} = 25^9$$

Kirjoitetaan molemmat puolet luvun 5 potenssina.

$$5^{2x^2} = (5^2)^9$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$5^{2x^2} = 5^{18}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$2x^2 = 18 \quad |:2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} = 3 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{9} = -3$$

### Vastaus

a)  $x = \frac{1}{2}$     b)  $x = -3$  tai  $x = 3$

## 13.13

- a) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 19 (mg).

$$f(x) = 19$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 80 \cdot 0,87^x.$$

$$80 \cdot 0,87^x = 19$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 10,322\dots$$

$$x \approx 10 \text{ (h)}$$

Kofeiinin määrä Niken elimistössä on 19 mg, kun aikaa on kulunut 10 tuntia.

- b) Kofeiinin määrä elimistössä on alussa 80 mg. Pitää selvittää, missä ajassa määrä pienenee puoleen eli  $\frac{80}{2} = 40$  milligrammaan.

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 40 (mg).

$$f(x) = 40$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 80 \cdot 0,87^x.$$

$$80 \cdot 0,87^x = 40$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 4,977\dots$$

$$x \approx 5,0 \text{ (h)}$$

Kofeiinin puoliintumisaika on 5,0 tuntia.

### Vastaus

- a) 10 tunnin kuluttua  
b) 5,0 tuntia

## 13.14

a)  $\frac{48}{4^x} = 2$

$$x = 2,292\dots$$

$$x \approx 2,29$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

b)  $5 \cdot 3^x = 2 \cdot 4^x$

$$x = 3,185\dots$$

$$x \approx 3,19$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

### Vastaus

a)  $x \approx 2,29$

b)  $x \approx 3,19$

## 13.15

a)  $2^{4x-1} = 8^x$

$$2^{4x-1} = (2^3)^x$$

$$2^{4x-1} = 2^{3x}$$

$$4x - 1 = 3x \quad | -3x + 1$$

$$x = 1$$

$$8 = 2^3$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

b)  $8^{4x} = 64^{x^2-8}$

$$8^{4x} = (8^2)^{x^2-8}$$

$$8^{4x} = 8^{2x^2-16}$$

$$4x = 2x^2 - 16 \quad | -2x^2 + 16$$

$$-2x^2 + 4x + 16 = 0$$

$$64 = 8^2$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

$$a = -2, b = 4 \text{ ja } c = 16$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 16}}{2 \cdot (-2)} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{-4}$$

$$= \frac{-4 \pm 12}{-4}$$

$$x = \frac{-4+12}{-4} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4-12}{-4} = 4$$

c)  $8^x = 4^{x+3}$

$$(2^3)^x = (2^2)^{x+3}$$

$$2^{3x} = 2^{2x+6}$$

$$3x = 2x + 6 \quad | -2x$$

$$x = 6$$

$$8 = 2^3, \quad 4 = 2^2$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

### Vastaus

a)  $x = 1$

b)  $x = -2$  tai  $x = 4$

c)  $x = 6$

## 13.16

a)  $(6^x)^3 = 36 \cdot 6^x$

$$(6^x)^3 = 6^2 \cdot 6^x$$

$$6^{3x} = 6^{2+x}$$

$$3x = 2 + x \quad | -x$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

$$36 = 6^2$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

b)  $\frac{5^6}{5^x} = 25^{x^2} \quad |$

$$5^{6-x} = (5^2)^{x^2}$$

$$5^{6-x} = 5^{2x^2}$$

$$6 - x = 2x^2 \quad | -2x^2$$

$$-2x^2 - x + 6 = 0$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad 25 = 5^2$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

$$a = -2, \quad b = -1 \quad \text{ja} \quad c = 6$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{-4}$$

$$= \frac{1 \pm 7}{-4}$$

$$x = \frac{1+7}{-4} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-7}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Vastaus**

a)  $x = 1$    b)  $x = -2$  ja  $x = \frac{3}{2}$

## 13.17

Sakun ratkaisu on oikein. Sekä Tanelin että Eemelin ratkaisussa on virhe.

Taneli on virheellisesti ilmaissut luvun 27 luvun 9 potenssina  $9^2$ .

Oikeasti  $27 = 3^3$ .

Korjattu ratkaisu:

$$27^x = 9^{x+1}$$

$$(3^3)^x = (3^2)^{x+1}$$

$$3^{3x} = 3^{2x+2}$$

$$3x = 2x + 2$$

$$x = 2$$

Eemelin ratkaisussa kantaluvut  $3^3$  ja  $3^2$  eivät ole yhtä suuret. Yhtälö pitää ensin kirjoittaa muotoon, jossa kantaluvut ovat yhtä suuret.

Korjattu ratkaisu.

$$27^x = 9^{x+1}$$

$$(3^3)^x = (3^2)^{x+1}$$

$$3^{3x} = 3^{2x+2}$$

$$3x = 2x + 2$$

$$x = 2$$

## 13.18

a)  $6^x = 36$

$$6^x = 6^2$$

$$x = 2$$

$$36 = 6^2$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

b)  $6^x = 6$

$$6^x = 6^1$$

$$x = 1$$

$$6 = 6^1$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

c)  $6^x = 1$

$$6^x = 6^0$$

$$x = 0$$

$$1 = 6^0$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

d)  $6^x = \frac{1}{6}$

$$6^x = 6^{-1}$$

$$x = -1$$

$$\frac{1}{6} = 6^{-1}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

### Vastaus

a)  $x = 2$

b)  $x = 1$

c)  $x = 0$

d)  $x = -1$

## 13.19

a)  $3^x = 3^{-3}$

$$x = -3$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

b)  $3^x = \frac{1}{3^4}$

$$3^x = 3^{-4}$$

$$x = -4$$

$$\frac{1}{3^4} = 3^{-4}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

c)  $3^x = \frac{1}{9}$

$$3^x = \frac{1}{3^2}$$

$$3^x = 3^{-2}$$

$$x = -2$$

$$9 = 3^2$$

$$\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

### Vastaus

a)  $x = -3$

b)  $x = -4$

c)  $x = -2$

## 13.20

$$\frac{16 \cdot 8^{5x}}{8 \cdot 32^{3x}} = 5$$

$$\frac{2^4 \cdot (2^3)^{5x}}{2^3 \cdot (2^5)^{3x}} = 5$$

$$\frac{2^4 \cdot \cancel{2^{15x}}^1}{2^3 \cdot \cancel{2^{15x}}^1} = 5$$

$$\frac{2^4}{2^3} = 5$$

$$2^{4-3} = 5$$

$$2 = 5$$

epätosi

$$16 = 2^4, \quad 8 = 2^3, \quad 32 = 2^5$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

**Vastaus**

ei ratkaisuja

## 13.21

- a) Ensimmäisen puoliintumisaajan jälkeen määrä on vähentynyt puoleen alkuperäisestä. Toisen puoliintumisaajan jälkeen määrä on puolet puolesta eli neljäsosa alkuperäisestä määrästä.

Siis määrä on vähentynyt neljäsosaan alkuperäisestä määrästä

$$2 \cdot 8,02 = 16,04 \approx 16,0$$

vuorokauden kuluttua.

- b) Ydinvoimalaonnettomuuden saastuttamalla alueella jodipitoisuus on noin kaksikymmentäkertainen turvalliseen määrään verrattuna. Pitää selvittää, kuinka monen puoliintumisaajan päästä isotoopin määrä on yksi kahdeskymmenesosa alkuperäisestä määrästä eli  $\frac{1}{20}m$ .

Ratkaistaan, kuinka monen puoliintumisaajan jälkeen määrä on  $\frac{1}{20}m$ .

$$m \cdot 0,5^x = \frac{1}{20}m$$

Ratkaistaan muuttuja  $x$   
CAS-laskimella.

$$x \approx 4,3219$$

Isotoopin määrä on siis vähentynyt turvalliselle tasolle

$$4,3219 \cdot 8,02 \approx 34,7$$

vuorokauden kuluttua.

### Vastaus

- a) 16,0 vuorokauden kuluttua  
b) 34,7 vuorokauden kuluttua